Ejercicio nº 1

Representa gráficamente la parábola $y = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ localizando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes.

Solución:

- Vértice:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{1} = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{2}{2} = -2$$

El vértice es $V(1, -2)$.

- Puntos de corte con los ejes:

— Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\quad y = -\frac{3}{2}$ $\rightarrow$ $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

— Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$ $\rightarrow$ $x^2 - 2x - 3 = 0$

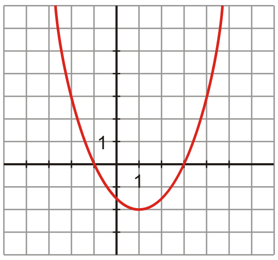
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Puntos de corte con el eje X:

$(3, 0)$ y $(-1, 0)$

- Puntos próximos al vértice:

x	2	-2
y	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$



Ejercicio nº 2

Representa gráficamente la parábola $f(x)=(1/4)x^2-2x+4$

Solución:

Por ser una función cuadrática, su representación es una parábola.

- Hallamos su vértice:

$$x=\frac{2}{2\cdot\frac{1}{4}}=4 \quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{4}\cdot 16-8+4=0 \quad\rightarrow\quad V(4,0)$$

- Puntos de corte con los ejes:

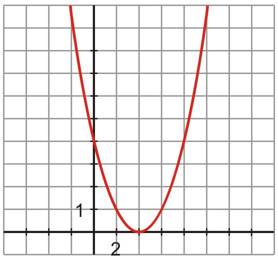
— Con el eje $X \quad\rightarrow\quad y=0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{4}x^2-2x+4=0 \quad\rightarrow\quad x^2-8x+16=0$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{8}{2}=4 \quad\rightarrow\quad (4,0),\ \text{que coincide, lógicamente, con el vértice.}$$

— Con eje $Y \quad\rightarrow\quad x=0 \quad\rightarrow\quad y=4 \quad\rightarrow\quad (0,\ 4)$

- Puntos próximos al vértice:

x	1	2	3	6	8
y	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	4



Ejercicio nº 3

Representa la siguiente parábola: $y = 2x^2 - x - 3$

Solución:

- Calculamos su vértice:

$$x = \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad y = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -\frac{25}{8} \quad \rightarrow \quad V\left(\frac{1}{4}, -\frac{25}{8}\right)$$

- Puntos de corte con los ejes:

— Con eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = -3 \quad \rightarrow \quad (0, -3)$

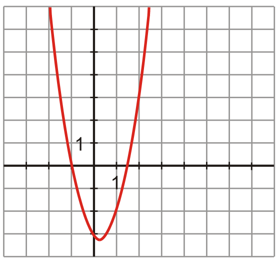
— Con eje $X \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje X son: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(-1, 0)$

- Puntos próximo al vértice:

x	1	2	$\frac{1}{2}$
y	-2	3	-3



Ejercicio nº 4

Representa gráficamente la parábola $y = -x^2 + 10x - 9$.

Solución:

- Hallamos el vértice:

$$x = \frac{-10}{-2} = 5 \quad \rightarrow \quad y = -25 + 50 - 9 = 16 \quad \rightarrow \quad V(5, 16)$$

- Puntos de corte con los ejes:

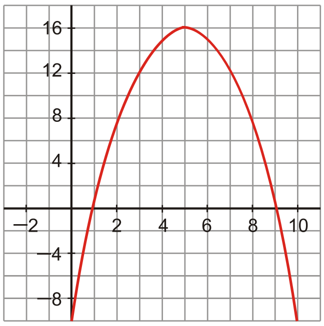
— Con eje $Y \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = -9 \quad \rightarrow \quad (0, -9)$

— Con eje $X \quad \rightarrow \quad y = 0 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 10x - 9 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{-2} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{-2} = \frac{-10 \pm 8}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-18}{-2} = 9 \quad \rightarrow \quad (9, 0) \\ \dfrac{-2}{-2} = 1 \quad \rightarrow \quad (1, 0) \end{cases}$$

- Tabla de valores para obtener puntos próximos al vértice:

x	2	3	4	6	7	8	10
y	7	12	15	15	12	7	–9



Ejercicio nº 5

Representa gráficamente la función $y = -x^2 + 2x - 1$.

Solución:

Por ser una función cuadrática, su representación es una parábola.

- Hallamos su vértice:

$$x = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \rightarrow \quad y = -1 + 2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad V(1, 0)$$

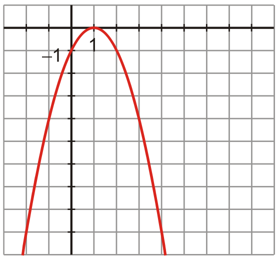
- Puntos de corte con los ejes:

— Con eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = -1$ $\rightarrow$ $(0, -1)$

— Con eje X $\rightarrow$ el único punto de corte será el vértice: $(1, 0)$

- Puntos próximos al vértice:

x	2	–2	–1	3
y	–1	–9	–4	–4



Ejercicio nº 6

Representa gráficamente la siguiente función:

a) $y = \dfrac{-3}{x}$

Solución:

a) Dominio de definición $= \mathbb{R} - \{0\}$

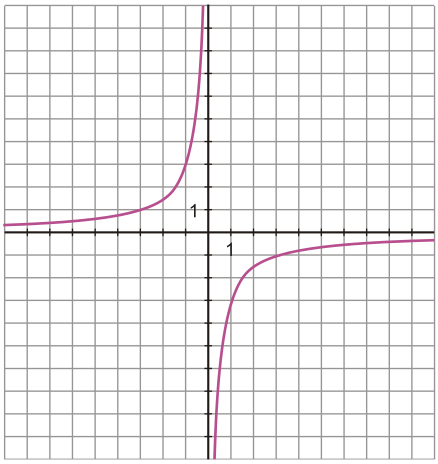
Calculamos algunos puntos próximos a $x = 0$:

x	–1	–0,5	–0,1	0,1	0,5	1
y	3	6	30	–30	–6	–3

Otros puntos interesantes:

x	10	50	100	–10	–100
y	–0,3	–0,06	–0,03	0,3	0,03

Los valores de y son muy próximos a 0.
Las asíntotas son las rectas $x = 0$ e $y = 0$.



Ejercicio nº 7

Representa gráficamente la siguiente función:

b) $y = \dfrac{6}{x}$

b) Dominio de definición $= \mathbb{R} - \{0\}$

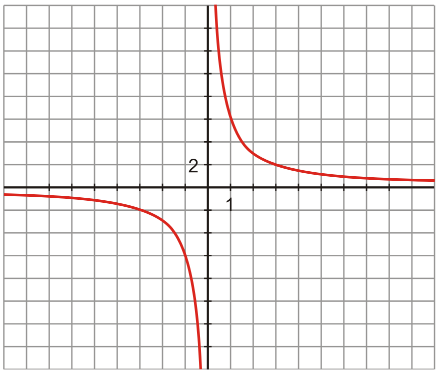
Tabla de valores en puntos próximos a $x = 0$:

x	–1	–0,5	–0,1	0,1	0,5	1
y	–6	–12	–60	60	12	6

Otros puntos interesantes:

x	–100	–60	–10	10	60	100
y	–0,06	–0,1	–0,6	0,6	0,1	0,06

Los valores de y están muy próximos a 0.
Las asíntotas son las rectas $x = 0$, $y = 0$.



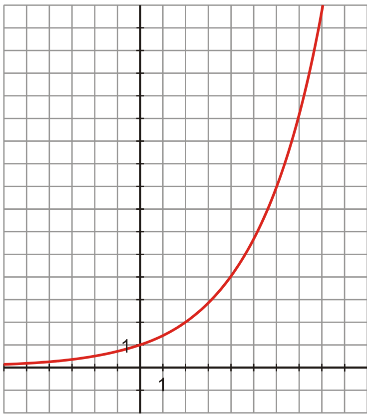
Ejercicio nº 8

Representa la función $y = 2^{0,5x}$ haciendo una tabla de valores.

Solución:

$y = 2^{0,5x}$ equivale a $y = 2^{\frac{x}{2}}$

x	–4	–2	0	2	4	6
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



Se observa en la gráfica que es una función creciente, cosa que ya sabíamos puesto que $a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} > 1$.

Ejercicio nº 9

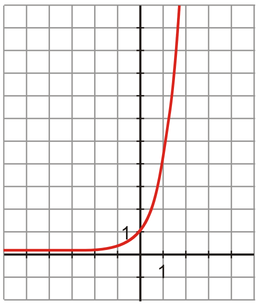
Escribe el dominio de la función $y = 4^x$ y represéntala gráficamente.

Solución:

$y = 4^x$ es una función exponencial. Su dominio son todos los números reales.

Hagamos una tabla de valores para representarla:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16



Ejercicio nº 10

Colocamos en el banco 25 000 € al 5% de interés anual.

a) Escribe la función que expresa el capital acumulado en función del tiempo, *t*, que permanezca el dinero en el banco.

b) ¿Cuánto tardará el dinero en duplicarse?

Solución:

a) $C =$ capital acumulado

5% de interés anual significa que el capital que hay a principios de año se multiplica por 1,05 al final. La expresión que da el capital acumulado al cabo de t años es:

$$C = 25000 \cdot 1{,}05^t \quad t \geq 0$$

b) Nos piden calcular t para que el capital se duplique:

$$25000 \cdot 1{,}05^t = 50000 \quad \rightarrow \quad 1{,}05^t = 2 \quad \rightarrow \quad t \approx 15 \text{ años}$$

Tardará en duplicarse, aproximadamente, 15 años.

Ejercicio nº 11

Se cerca una finca rectangular de área A con 42 m de alambrada, sin que sobre ni falte nada.

a) Expresa el área de la finca en función de uno de sus lados

b) Representa gráficamente la expresión anterior.

c) ¿Cuál es el dominio de definición?

d) ¿Para qué valor de los lados obtenemos la finca de área máxima?

Solución:

Las dimensiones de la finca son $x, \quad 21 - x$.

a) A = área de la finca

La expresión analítica buscada es $A(x) = x\,(21 - x) \;\rightarrow\; A(x) = -x^2 + 21x$, que es una función cuadrática.

b) Será una parábola abierta hacia abajo:

- Vértice: $x = \dfrac{21}{2} \qquad y = -\dfrac{441}{4} + \dfrac{441}{2} = \dfrac{441}{4} = 110{,}25$

  $V\,(10{,}5;\ 110{,}25)$

- Puntos de corte con los ejes:

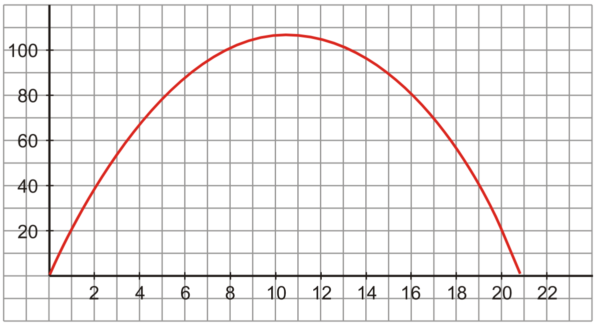
— Eje $X \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 21x = 0 \;\rightarrow\; x(-x + 21) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 21 \end{cases}$

$(0, 0)$ y $(21, 0)$

— Eje $Y \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$

- Tabla de valores:

x	5	10	15	20
y	80	110	90	20



<u>Ejercicio nº 12</u>

El sueldo de Marta sube a razón del 3% anual. Si su sueldo actual es de 20 000 € anuales, ¿cuánto cobrará dentro de 10 años?

Escribe la función que da el sueldo según los años transcurridos.

Solución:

Al cabo de 10 años cobrará: $C = 20\,000 \cdot (1{,}03)^{10} = 26\,878{,}33$ €

Al cabo de t años cobrará: $C = 20\,000 \cdot (1{,}03)^{t}$

Siendo $C =$ sueldo anual (€)
$t =$ tiempo (años)

Ejercicio nº 13

María se quiere comprar una parcela rectangular que tenga como área 1 200 m^2.

a) Escribe la función que da el ancho de la finca en función del largo.

b) Haz la gráfica correspondiente.

Solución:

a) Llamamos $x \to$ largo de la finca
$y \to$ ancho de la finca

El área de la finca será $\to$ $x \cdot y = 1200$ $\to y = \dfrac{1200}{x}$

b) Puesto que x e y son longitudes, ambas han de ser positivas, luego el dominio de definición será $(0, +\infty)$

Hacemos una tabla de valores para representarla:

x	200	400	600	800	1200
y	6	3	2	1,5	1